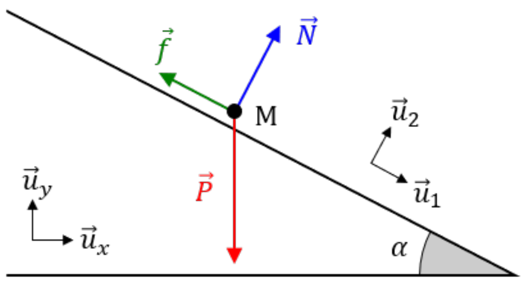
Correction TD - M1

Coordonnées cartésiennes

Ex. n°1 • Cycliste en pente ★☆☆ 7640

Schéma :



On a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{P} = mg\Big(-\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u}_2 + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{u}_1\Big) \\ \overrightarrow{N} = N\Big(\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u}_y + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{u}_x\Big) \\ \overrightarrow{f} = f\Big(-\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u}_x + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{u}_y\Big) \end{cases}$$

Ex. n°2 • Interpellation pour vitesse excessive ★☆☆ 8778

1) La motard accélère uniformément. On note a_1 son accélération.

$$a(t) = a_1 \quad \Rightarrow \quad v(t) = a_1 t$$

On en déduit :

$$\boxed{a_1 = \frac{90\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}}{10\ \mathrm{s}} = 2{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}}$$

Notons O le point où le moteur M passe devant le gendarme G. Notons P le point où G arrive à rattraper M.

On a :

$$\begin{cases} \mathrm{OM}(t) = v_0 t \\ \mathrm{OG}(t) = \dfrac{a_1 t^2}{2} \end{cases}$$

On cherche alors T tel que :

$$\mathrm{OP}(T) = v_0 T = \frac{a_1 T^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2v_0}{a_1} = 22{,}2\ \mathrm{s}}$$

2) Le gendarme aura parcouru une distance :

$$d = v_0 T = \frac{a_1 T^2}{2} = 617\ \mathrm{m}$$

3) Le gendarme aura atteint une vitesse :

$$\boxed{v(T) = a_1 T = 55{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 200\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}}$$

Ex. n°3 • Trajectoire parabolique ★⯪☆ 4378

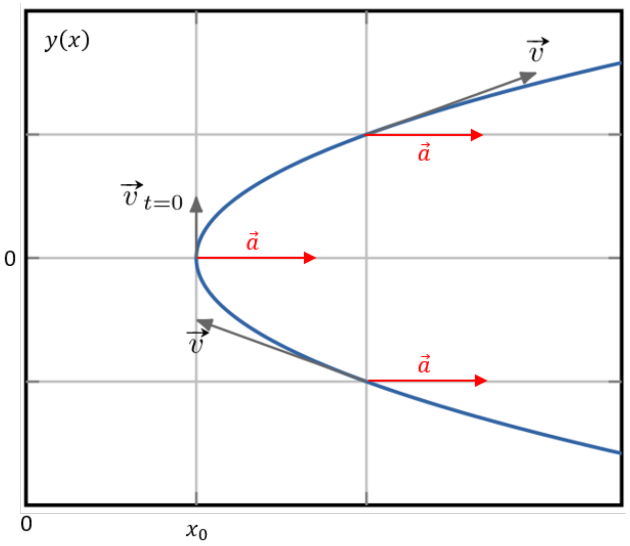
1) On obtient :

$$\begin{array}{llll} \dot{x} = 2a_0 t & \dot{y} = v_0 & \dot{z} = 0 & v = \sqrt{(2a_0 t)^2 + v_0^2} \\ \ddot{x} = 2a_0 & \ddot{y} = 0 & \ddot{z} = 0 & a = 2a_0 \end{array}$$

2) On a :

$$t = \frac{y}{v_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(y) = \frac{a_0}{v_0^2} y^2 + x_0}$$

La courbe $x(y)$ est donc une parabole qui passe par x_0 lorsque $y = 0$. Ainsi :



Coordonnées polaires

Ex. n°4 • Cardioïde ★★☆ 5098

1) On sait que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r} = \frac{a}{2}\Big(1+\cos(\theta)\Big)\,\overrightarrow{u_r}$$

De plus,

$$\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_y}$$

Ainsi, avec $\theta = \omega t$, on a :

$$\boxed{x(t) = \frac{a}{2}\Big(1+\cos(\omega t)\Big)\cos(\omega t) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{a}{2}\Big(1+\cos(\omega t)\Big)\sin(\omega t)}$$

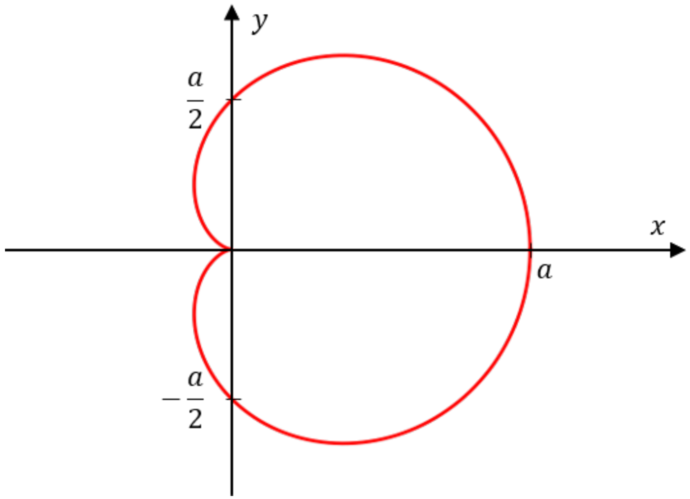
2) Dans la base polaire :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \dot r\,\overrightarrow{u_r} + r\dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a\omega}{2}\sin(\omega t) \\ \dfrac{a\omega}{2}\Big[1+\cos(\omega t)\Big] \end{pmatrix}}$$

3) On a :

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \frac{a\omega}{2}\sqrt{\sin^2(\omega t) + \Big[1+\cos(\omega t)\Big]^2} = \boxed{a\omega\sqrt{\frac{1+\cos(\omega t)}{2}}}$$

4) Trajectoire :



Ex. n°5 • Satellite géostationnaire ★★☆ 7675

1) On a :

$$\boxed{T = 1 \text{ jour} = 24 \times 3600 \text{ s} = 8{,}64 \times 10^4 \text{ s}}$$

Et,

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}27 \times 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

2) Pour un mouvement circulaire (R constant) uniforme (v constant) :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v} = r\omega\,\overrightarrow{u_\theta} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a} = -r\omega^2\,\overrightarrow{u_r}$$

Avec la formule de l'énoncé, on a :

$$a = r\omega^2 = g\left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \left(\frac{gR^2}{\omega^2}\right)^{1/3} = 42{,}3 \times 10^6 \text{ m}}$$

3) On a :

$$\boxed{v = r\omega = 3{,}07\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}}$$

Ex. n°6 • Bretelle de sortie d'autoroute ★★☆ 6593

1) La voiture suit une trajectoire circulaire uniforme. Ainsi, la norme du vecteur accélération vaut :

$$a_0 = \frac{v_0^2}{R} = 15{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} > a_m$$

La voiture dérape.

2) Avec le même raisonnement :

$$a_m = \frac{v_1^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1 = 22{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 80{,}5\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}}$$

3) On rappelle qu'en coordonnées polaires, sur une trajectoire circulaire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OM}} = R\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{v} = R\omega\overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{a} = R\dot{\omega}\overrightarrow{u_\theta} - R\omega^2\overrightarrow{u_r} = \dfrac{dv}{dt}\overrightarrow{u_\theta} - \dfrac{v^2(t)}{R}\overrightarrow{u_r} \end{cases}$$

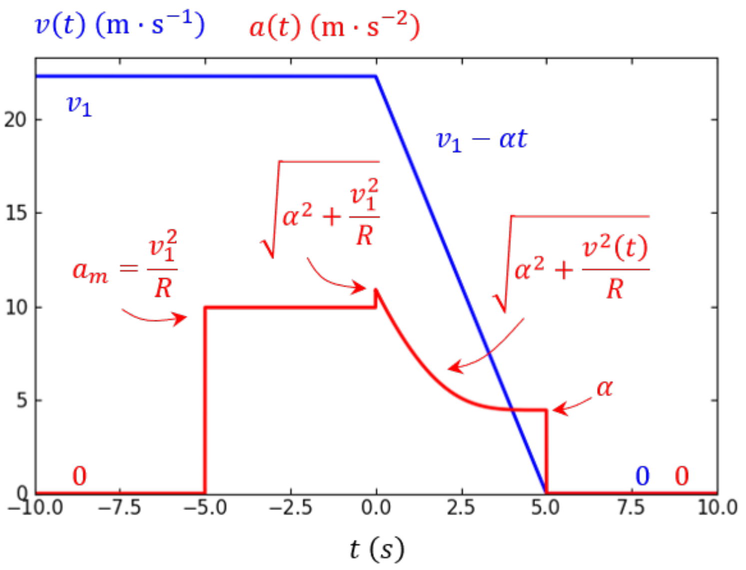
De plus, la norme de la vitesse décroît linéairement dans le temps. Donc :

$$v(t) = R\omega(t) = v_1 - \alpha t \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -\alpha$$

avec α un coefficient positif. On en déduit :

$$a(t) = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{v^2(t)}{R}\right)^2}$$

Courbes :



En $t = 0^+$ la voiture commence à freiner et cela se traduit par une augmentation brusque de l'accélération. Plus le freinage est puissant (α grand), plus l'augmentation de l'accélération est importante. Dans cet exemple, la voiture sort de piste au moment où elle freine. C'est pour cela qu'il fut toujours freiner avant le virage, pas pendant...

Coordonnées cylindriques

Ex. n°7 • Trajectoire hélicoïdale ★★☆ 4908

1) On a :

$$[R] = [x] = \text{Longueur}$$
$$[\omega t] = 1 \quad \Rightarrow \quad [\omega] = \text{Temps}^{-1}$$
$$[\alpha] = \left[\frac{z}{t}\right] = \text{Longueur}\cdot\text{Temps}^{-1} = \text{Vitesse}$$

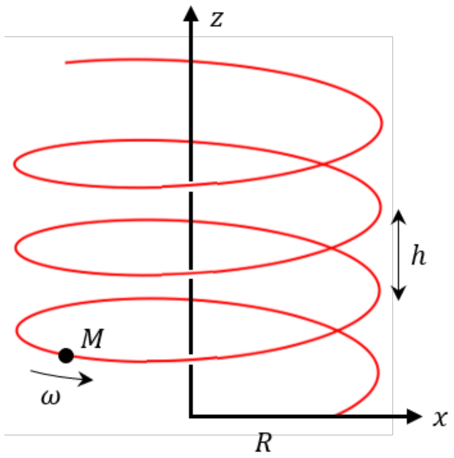
2) On rappelle le lien entre les coordonnées de la base cartésienne et de la base cylindrique :

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{R^2} = R \qquad \text{et} \qquad \tan(\theta) = \frac{y}{x} = \tan(\omega t)$$

Ainsi :

$$\boxed{r(t) = R} \qquad \boxed{\theta(t) = \omega t} \qquad \boxed{z(t) = \alpha t}$$

3) Le point se déplace à la surface d'un cylindre (car r est constant). L'angle et l'altitude croissent tous deux linéairement avec le temps. Cette courbe s'appelle une hélice.



4) En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} = \dot{x}\ \vec{u}_x + \dot{y}\ \vec{u}_y + \dot{z}\ \vec{u}_z = \boxed{R\omega\left(\cos(\omega t)\ \ \vec{u}_y - \sin(\omega t)\ \ \vec{u}_x\right) + \alpha\ \vec{u}_z}$$

En coordonnées cylindriques, on rappelle que l'on a :

$$\vec{v} = \dot{r}\ \vec{u}_r + r\dot{\theta}\ \vec{u}_\theta + \dot{z}\ \vec{u}_z = \boxed{R\omega\ \vec{u}_\theta + \alpha\ \vec{u}_z}$$

Sa norme vaut :

$$\boxed{v = \sqrt{(R\omega)^2 + \alpha^2}}$$

Ex. n°8 • Pendule conique ★★☆ 2715

On a immédiatement la coordonnées $\boxed{z = L\ \cos(\alpha)}$

Dans le plan (Hxy) la trajectoire est circulaire de rayon $R = L\sin(\alpha)$. De plus, $\theta(t=0) = 0$ d'après l'énoncé, et puisque la vitesse angulaire est constante (mouvement circulaire uniforme) :

$$\boxed{r = L\ \sin(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \theta = \omega t}$$

Coordonnées sphériques

Ex. n°9 • Trajectoire d'un avion ★★☆ 8951

1) Pour un mouvement du nord vers le sud, l'angle φ reste constant. Il décrit un cercle de rayon R_T à la vitesse v uniforme. Ainsi,

$$v = R\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta(t) = \frac{vt}{R_T}}$$

2) C'est désormais l'angle θ qui est constant et φ qui varie. Par ailleurs, le cercle décrit a pour rayon $R_T\ \sin(\theta)$. Ainsi,

$$v = -R_T\ \sin(\theta)\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi(t) = \frac{vt}{R_T\ \sin(\theta)}}$$

3) Sur le grand cercle, la distance vaut :

$$d = R_T\lambda$$

Pour la distance à latitude constante, le deux villes se situent sur un cercle de rayon $R_T\ \sin(\theta)$ avec $\theta = 45°$. Ainsi,

$$d_{lat} = R_T\ \sin(\theta) \times \Delta\varphi \quad \text{avec :} \quad \Delta\varphi = 79°$$

Ainsi,

$$\frac{d}{d_{lat}} = \frac{\lambda}{\Delta\varphi\ \sin(\theta)} = 0{,}95 < 1$$

Divers

Ex. n°10 • Conversion d'unités ★☆☆ 5735

1) On a :

$$v = 70\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 70\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 70\ \frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = \boxed{19{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

2) On a :

$$\omega = 3600\ \text{tours}\cdot\text{min}^{-1} = 3600\ \frac{\text{tours}}{\text{min}} = 3600\ \frac{2\pi\ \text{rad}}{60\ \text{s}} = \boxed{377\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

Ex. n°11 • Mouvements d'un planeur ★☆☆ 3924

1) C'est la (3) cas le vecteur accélération doit toujours est dirigé vers l'intérieur de la trajectoire.

2) Cas (1) : le vecteur $\overrightarrow{a}_{\parallel} \propto -\overrightarrow{v}$. Donc v diminue.

Cas (2) : le vecteur $\overrightarrow{a}_{\parallel} \propto +\overrightarrow{v}$. Donc v augmente.

Cas (4) : le vecteur $\overrightarrow{a}_{\parallel} = \overrightarrow{0}$. Donc v reste constant.

3) Pour un mouvement circulaire (R constant) uniforme (v constant) :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = R\overrightarrow{u_r} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v} = R\omega\overrightarrow{u_\theta} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a} = -R\omega^2\overrightarrow{u_r} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r}$$

Ainsi : $\boxed{a = \dfrac{v^2}{R}}$

Ex. n°12 • Conjonction de planètes ★★☆ 3356

1) La vitesse angulaire sur chaque mouvement est $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. L'angle par rapport à un axe de référence vaut donc : $\theta = \dfrac{2\pi t}{T}$.

On en déduit alors la différence angulaire $\Delta\theta$ entre les directions des deux planètes :

$$\Delta\theta = 2\pi\left(\frac{1}{T_{\mathrm{A}}} - \frac{1}{T_{\mathrm{B}}}\right)t$$

Les planètes sont en conjonction quand $\Delta\theta = 2\pi \bmod 2\pi$. En choisissant une conjonction comme origine des temps, la suivante se produit pour T_{conj} tel que :

$$2\pi = 2\pi\left(\frac{1}{T_{\mathrm{A}}} - \frac{1}{T_{\mathrm{B}}}\right)T_{\mathrm{conj}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_{\mathrm{conj}} = \left(\frac{1}{T_{\mathrm{A}}} - \frac{1}{T_{\mathrm{B}}}\right)^{-1} = \frac{T_{\mathrm{A}}T_{\mathrm{A}}}{T_{\mathrm{B}} - T_{\mathrm{A}}}}$$

2) AN :

$$\boxed{T_{\mathrm{conj}} = 587 \text{ jours}}$$

Pour s'entraîner au DS

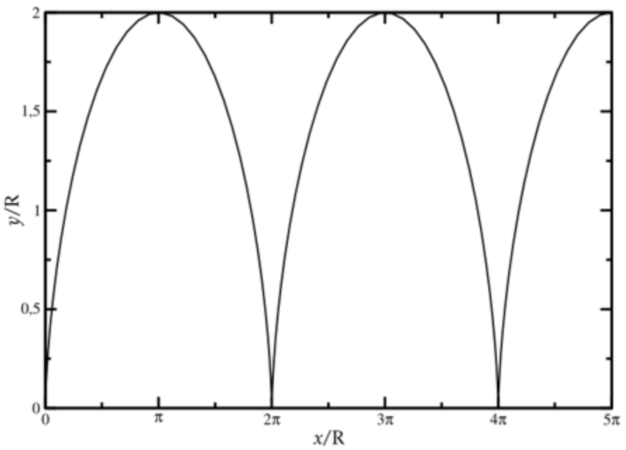
Ex. n°13 • Cycloïde ★★✯ 4412

1) Puisque la roue ne glisse pas, la distance parcourue par le point C est égale à la distance de l'arc de cercle allant de M($t = 0$) à M(t). C'est à dire (par définition même de l'unité radian) : $\boxed{x_c = R\theta}$

2) On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = x_c\ \overrightarrow{u_x} + R\ \overrightarrow{u_y} + R\left(-\cos(\theta)\ \overrightarrow{u_y} - \sin(\theta)\ \overrightarrow{u_x}\right)\\ &= \boxed{R\Big[\left(\theta - \sin(\theta)\right)\overrightarrow{u_x} + \left(1 - \cos(\theta)\right)\overrightarrow{u_y}\Big]}\end{aligned}$$

3) Trajectoire :



4) On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} = \boxed{R\dot\theta\Big[\left(1 - \cos(\theta)\right)\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\ \overrightarrow{u_y}\Big]}\\ \overrightarrow{a} &= \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \boxed{R\Big(\ddot\theta\left(1 - \cos(\theta)\right) + \dot\theta^2\sin(\theta)\Big)\overrightarrow{u_x} + R\Big(\ddot\theta\sin(\theta) + \dot\theta^2\cos(\theta)\Big)\overrightarrow{u_y}}\end{aligned}$$

Lorsque M touche le sol, $\theta = 0 \bmod 2\pi$. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{v}_{\mathrm{sol}} = \overrightarrow{0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{a}_{\mathrm{sol}} = R\dot\theta^2\ \overrightarrow{u_y} = \frac{v_c^2}{R}\ \overrightarrow{u_y}}$$

Ex. n°14 • Trajectoire des planètes ★★★ 2647

1) On a :

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\omega\,\overrightarrow{u_\theta} = \frac{r_0 e\omega\,\sin(\theta)}{(1+e\,\cos(\theta))^2}\,\overrightarrow{u_r} + \frac{r_0\omega}{1+e\,\cos(\theta)}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

2) L'accélération vaut :

$$\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\omega^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

Puisque l'accélération radiale est nulle, on a :

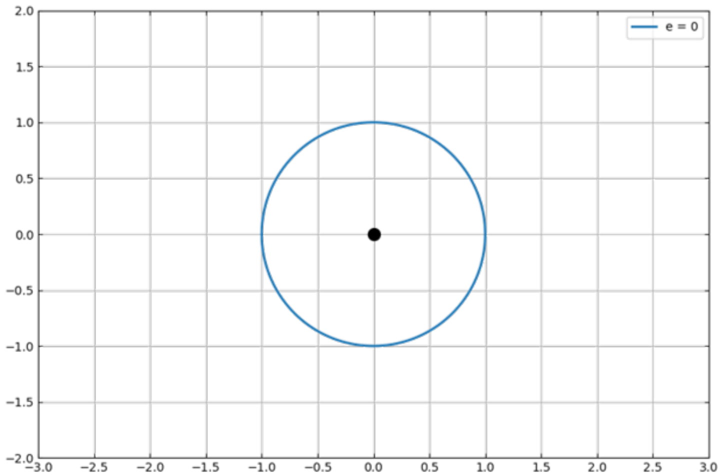
$$2\dot{r}\omega + r\dot{\omega} = 0$$

Or,

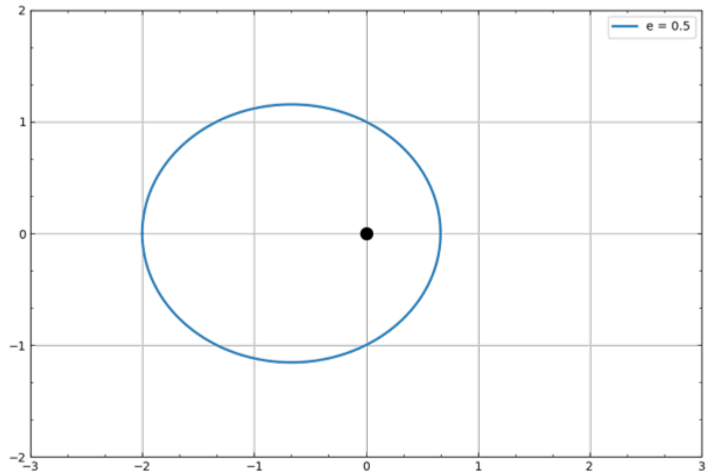
$$\frac{d}{dt}\left(r^2\omega\right) = r\left(2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}\right) = 0$$

La quantité $r^2\omega$ est bien constante.

3) Lorsque $e = 0$, $r = r_0$. Le rayon est constant, il s'agit donc d'un mouvement circulaire. Ce mouvement est uniforme d'après la question précédente ($\omega = cte$).



4) Graphe :



5) Par définition du grand-axe :

$$2a = \frac{r_0}{1+e} + \frac{r_0}{1-e} = \frac{2r_0}{(1+e)\,(1-e)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{r_0}{1-e^2}}$$

6) D'après la question 1), il s'agit du cas où $\sin(\theta) = 0$, donc pour $\theta = 0$ et π.

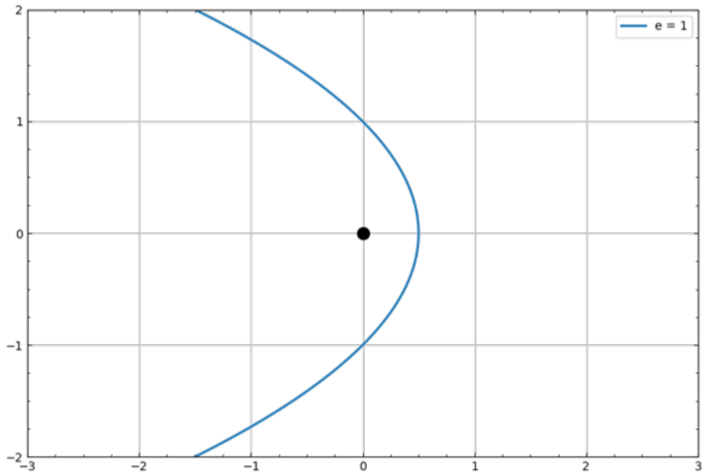
7) On a :

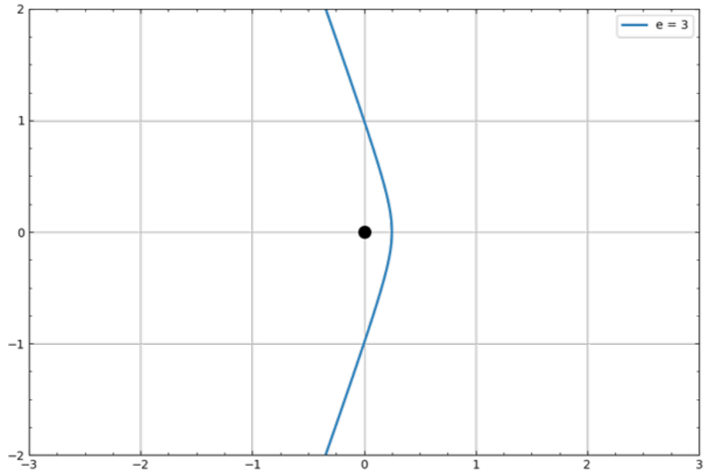
$$\boxed{x = r\,\cos(\theta)} \quad \text{et} \quad \boxed{y = r\,\sin(\theta)}$$

8) On a :

$$\begin{aligned} r = \frac{r_0}{1+\cos(\theta)} \quad &\Rightarrow \quad r + r\,\cos(\theta) = r_0 \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} + x = r_0 \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = r_0 - x \\ &\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = r_0^2 + x^2 - 2r_0 x \\ &\Rightarrow \quad \boxed{x = -\frac{y^2}{2r_0} + \frac{r_0}{2}} \end{aligned}$$

Graphe :





9) Par définition d'une distance, on a nécessairement $e > 0$. Ainsi,

$$r = \frac{r_0}{1 + e\,\cos(\theta)} > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + e\,\cos(\theta) > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) > -\frac{1}{e}$$

On introduit :

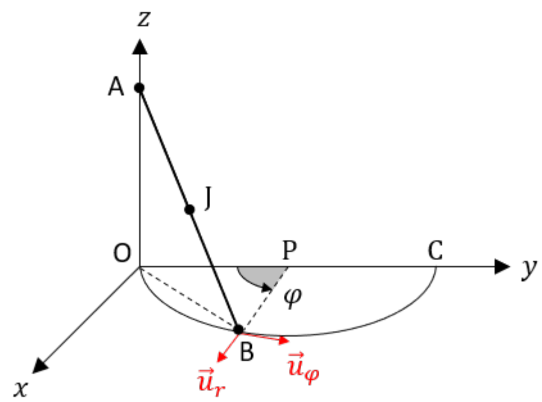
$$\theta_\ell = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$$

Alors : $\boxed{\theta \in [-\theta_\ell;\theta_\ell]}$

Pour $e = 3$, on a $\theta_\ell = 109$. On en déduit le graphe ci-dessous, où les asymptotes font des angles de $\pm\theta_\ell$ avec l'horizontale.

Ex. n°15 • Chute guidée d'un bâton ★★★ 9841

1) La base polaire décrite dans l'énoncé est la suivante :



2) On a :

$$\boxed{\vec{u}_r = -\cos(\varphi)\,\vec{u}_y + \sin(\varphi)\,\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{u}_\varphi = \cos(\varphi)\,\vec{u}_x + \sin(\varphi)\,\vec{u}_y}$$

3) La vitesse angulaire vaut :

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \omega t$$

Car ω est une constante. La chute se termine lorsque $\varphi = \pi$. Ainsi,

$$\boxed{T = \frac{\pi}{\omega}}$$

4) Vecteur position :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{PB}} = b\ \overrightarrow{u_r}}$$

On dérive ce vecteur pour obtenir la vitesse.

$$\boxed{\overrightarrow{v}_{\mathrm{B}} = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{dt} = b\omega\ \overrightarrow{u_\varphi}}$$

On dérive ce vecteur pour obtenir l'accélération.

$$\boxed{\overrightarrow{a}_{\mathrm{B}} = \frac{d\overrightarrow{v}_{\mathrm{B}}}{dt} = -b\omega^2\ \overrightarrow{u_r}}$$

5) On sait que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}} = b\ \overrightarrow{u_y} + b\ \overrightarrow{u_r} = b\Big[\sin(\omega t)\ \overrightarrow{u_x} + (1-\cos(\omega t))\ \overrightarrow{u_y}\Big]$$

Ainsi,

$$\boxed{x_{\mathrm{B}}(t) = b\ \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad y_{\mathrm{B}}(t) = b\Big(1-\cos(\omega t)\Big)}$$

6) Le point J étant à mi-distance entre A et B, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} x_{\mathrm{J}}(t) = \dfrac{x_{\mathrm{A}}(t) + x_{\mathrm{B}}(t)}{2} = \dfrac{b}{2}\ \sin(\omega t) \\ y_{\mathrm{J}}(t) = \dfrac{y_{\mathrm{A}}(t) + y_{\mathrm{B}}(t)}{2} = \dfrac{b}{2}\Big(1-\cos(\omega t)\Big) \end{array}}$$

Avant de déterminer la distance $z_{\mathrm{J}}(t)$, déterminons dans un premier temps $z_{\mathrm{A}}(t)$ à l'aide du théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{A}}(t) &= \sqrt{(2b)^2 + OB^2} \qquad \Rightarrow \quad \boxed{z_{\mathrm{J}}(t) = \frac{x_{\mathrm{A}}(t)}{2} = b\ \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)} \\ &= \sqrt{(2b)^2 + x_b^2 + y_B^2} \\ &= b\ \sqrt{4 + 2\,(1-\cos(\omega t))} \\ &= b\ \sqrt{4 + 4\ \sin^2(\omega t/2)} \\ &= 2b\ \sqrt{\cos^2(\omega t/2)} \\ &= 2b\ \cos(\omega t/2) \end{aligned}$$

7) On calcule le vecteur vitesse dans la base cartésienne :

$$\overrightarrow{v}_{\mathrm{J}} = \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dfrac{b\omega}{2}\ \cos(\omega t) \\ \dfrac{b\omega}{2}\ \sin(\omega t) \\ \dfrac{b\omega}{2}\ \sin\left(\dfrac{\omega t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

On en déduit la norme au carré du vecteur :

$$v_{\mathrm{J}}^2(t) = \left(\frac{b\omega}{2}\right)^2 \left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) + \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right) = \boxed{\left(\frac{b\omega}{2}\right)^2 \left(1 + \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right)}$$

8) Par définition :

$$\begin{aligned} \langle v_{\mathrm{J}}^2(t) \rangle &= \boxed{\frac{1}{T}\int_0^T v_{\mathrm{J}}^2(t)\ dt} \\ &= \frac{1}{T}\left(\frac{b\omega}{2}\right)^2 \int_0^T \left(1 + \frac{1-\cos(\omega t)}{2}\right)\ dt \\ &= \frac{1}{T}\left(\frac{b\omega}{2}\right)^2 \int_0^T \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos(\omega t)\right) dt \\ &= \frac{1}{T}\left(\frac{b\omega}{2}\right)^2 \left[\frac{3t}{2} - \frac{1}{2\omega}\sin(\omega t)\right]_0^T \\ &= \boxed{\frac{3}{2}\left(\frac{b\omega}{2}\right)^2} \end{aligned}$$